PART3　共通接線

3 ［1］ 2 つの放物線 $y=x^2-2x+2$, $y=-x^2+8x-11$ の共通接線の方程式を求めよ。

［2］ 2 曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax-20$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。また，その接点における共通接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

2 つ以上の曲線に接する直線を「共通接線」という。

［1］ 2 つの放物線の接線を，接点の x 座標をそれぞれ s，t として求める。2 つの接線が共通接線となるのは，2 つの接線が一致するときである。

［2］ 2 曲線が点 A で接するのは，2 曲線が点 A を通り，かつ点 A における 2 曲線の接線が一致するときである。点 A の x 座標を α とすると，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が点 A で接する条件は

$$f(\alpha)=g(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

第14講　PART3　確認問題

1　2 つの放物線 $y=x^2-6x+13$，$y=-x^2+4x-4$ の共通接線の方程式を求めよ。

$y=$ ア $x-$ イ ，$y=$ ウエ $x+$ オカ

2　2 曲線 $y=x^3+2x^2+1$ と $y=3x^2+px+4$ が接するとき，定数 p の値を求めよ。また，その接点における共通接線の方程式を求めよ。

$p=$ キ

共通接線の方程式　$y=$ ク $x+$ ケ

PART3　共通接線

3　[1]　2 つの放物線 $y=x^2-2x+2$, $y=-x^2+8x-11$ の共通接線の方程式を求めよ。

[2]　2 曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax-20$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。

また，その接点における共通接線の方程式を求めよ。

[1]　$f(x)=x^2-2x+2$ とおくと　$f'(x)=2x-2$

よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(s,\ s^2-2s+2)$ における接線の方程式は

$$y=(2s-2)(x-s)+s^2-2s+2 \quad \text{すなわち} \quad y=(2s-2)x-s^2+2 \ \cdots\cdots \text{①}$$

$g(x)=-x^2+8x-11$ とおくと　$g'(x)=-2x+8$

よって，放物線 $y=g(x)$ 上の点 $(t,\ -t^2+8t-11)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+8)(x-t)-t^2+8t-11 \quad \text{すなわち} \quad y=(-2t+8)x+t^2-11 \ \cdots\cdots \text{②}$$

①と②が一致するとき，係数を比較して

$$\begin{cases} 2s-2=-2t+8 \\ -s^2+2=t^2-11 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (s,\ t)=(3,\ 2),\ (2,\ 3)$$

よって，求める共通接線の方程式は　$y=2x-2$，$y=4x-7$

[2]　$f(x)=x^3-3x$，$g(x)=-x^2+ax-20$ とおくと　$f'(x)=3x^2-3$，$g'(x)=-2x+a$

2 曲線が $x=\alpha$ の点で接するための条件は

$$f(\alpha)=g(\alpha) \ \cdots\cdots \text{①} \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha)=g'(\alpha) \ \cdots\cdots \text{②}$$

①より　$\alpha^3-3\alpha=-\alpha^2+a\alpha-20$ …… ①′

②より　$3\alpha^2-3=-2\alpha+a$　すなわち　$a=3\alpha^2+2\alpha-3$ …… ②′

②′ を①′ に代入して

$$\alpha^3-3\alpha=-\alpha^2+(3\alpha^2+2\alpha-3)\alpha-20 \qquad 2\alpha^3+\alpha^2-20=0$$

$$(\alpha-2)(2\alpha^2+5\alpha+10)=0$$

$$2\alpha^2+5\alpha+10=2\left(\alpha+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{55}{8}>0 \quad \text{より} \quad \alpha=2$$

このとき②′ より　$a=13$

$\alpha=2$ のとき　$f(2)=2$，$f'(2)=9$

よって，求める共通接線の方程式は　$y=9(x-2)+2$　　すなわち　$y=9x-16$

第14講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3，ウエ：-4，オカ：12

[解説]

$f(x)=x^2-6x+13$ とおくと

$$f'(x)=2x-6$$

よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(s,\ s^2-6s+13)$

における接線の方程式は [A]

$$y=(2s-6)(x-s)+s^2-6s+13 \quad \text{[B]}$$

すなわち

$$y=(2s-6)x-s^2+13 \quad \cdots\cdots ①$$

$g(x)=-x^2+4x-4$ とおくと

$$g'(x)=-2x+4$$

よって，放物線 $y=g(x)$ 上の点 $(t,\ -t^2+4t-4)$

における接線の方程式は

$$y=(-2t+4)(x-t)-t^2+4t-4 \quad \text{[B]}$$

すなわち

$$y=(-2t+4)x+t^2-4 \quad \cdots\cdots ②$$

2 直線①，②が一致するとき，係数を比較して

$$\begin{cases} 2s-6=-2t+4 \\ -s^2+13=t^2-4 \end{cases}$$

これを解いて

$$(s,\ t)=(4,\ 1),\ (1,\ 4)$$

よって，求める共通接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=2x-3,\ y=-4x+12}$$

[A]　2 つの放物線において，接点の x 座標をそれぞれ s，t として接線の方程式を求める。求めた 2 つの方程式が一致するときに共通接線となるから，そのときの s，t の値を求めればよい。

[B]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2 **[正解]** キ：5，ク：－，ケ：1

[解説]

$f(x)=x^3+2x^2+1$，$g(x)=3x^2+px+4$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+4x,\quad g'(x)=6x+p$$

2 曲線が $x=\alpha$ の点で接するための条件は [C]

$$f(\alpha)=g(\alpha)\ \cdots\cdots①$$

かつ　$f'(\alpha)=g'(\alpha)\ \cdots\cdots②$

①より　$\alpha^3+2\alpha^2+1=3\alpha^2+p\alpha+4$

すなわち　$\alpha^3-\alpha^2-p\alpha-3=0\ \cdots\cdots①'$

②より　$3\alpha^2+4\alpha=6\alpha+p$

すなわち　$p=3\alpha^2-2\alpha\ \cdots\cdots②'$

②′を①′に代入して

$$\alpha^3-\alpha^2-(3\alpha^2-2\alpha)\alpha-3=0$$

$$2\alpha^3-\alpha^2+3=0$$

$$(\alpha+1)(2\alpha^2-3\alpha+3)=0$$

$2\alpha^2-3\alpha+3=2\left(\alpha-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}>0$ より $\alpha=-1$

ゆえに，②′より　$\boldsymbol{p=5}$

また　$f(-1)=2$，$f'(-1)=-1$

よって，求める共通接線の方程式は

$$y=-\{x-(-1)\}+2$$

すなわち　$\boldsymbol{y=-x+1}$

[C]　2 曲線が点 A で接するのは，2 曲線が点 A を通り，かつ点 A における 2 曲線の接線が一致するときである。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=\alpha$ の点で接する条件は
　$f(\alpha)=g(\alpha)$ かつ $f'(\alpha)=g'(\alpha)$